La suite de Sylvester et son au-delà

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : questions **1)** et **2)**.

— Piste rouge : tout le devoir.

1 La suite de Sylvester

On appelle *suite de Sylvester* la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_0 = 2$ et $s_{n+1} = s_0 \dots s_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose alors $t_n = s_n - \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer que s_n est un entier supérieur à $n+2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad s_{n+1} = s_n^2 - s_n + 1 \quad$ et en déduire une expression analogue de t_{n+1} en fonction de t_n.

c) Simplifier $\dfrac{1}{s_n - 1} - \dfrac{1}{s_{n+1} - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis en déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{s_k}$.

2) On pose $q_n = \dfrac{\ln t_n}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ pour lesquels $p \geqslant n$: $\quad q_p = q_n + \displaystyle\sum_{k=n}^{p-1} \frac{1}{2^{k+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{4t_k^2}\right)$.

b) En déduire que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif q_∞.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leqslant q_\infty - q_n \leqslant \dfrac{1}{4t_n^2\, 2^n}$.

On pose $\alpha = e^{q_\infty}$. Pour information, α vaut $1,5979$ à 10^{-4} près.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leqslant \alpha^{2^n} - t_n \leqslant t_n\left(e^{\frac{1}{4t_n^2}} - 1\right), \quad$ puis en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(s_n - \alpha^{2^n}\right)$.

2 Par-delà Sylvester

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels pour laquelle $a_0 \geqslant 2$ et $a_{n+1} \geqslant a_n^2 - a_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Objectif de cette partie : justifier l'existence du réel $\ell = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$ et montrer qu'il est rarement rationnel.

On pose $x_n = a_0 \dots a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on note y_n l'entier pour lequel $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{y_n}{x_n}$ après mise au même dénominateur.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad a_n \geqslant s_n$.

b) Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement croissantes.

On pose à présent $u_n = \dfrac{y_n}{x_n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k}$ et $v_n = \dfrac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad v_n - u_n = \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{a_{n+2} - 1} + \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$.

c) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

5) On suppose dans cette question que ℓ est rationnel, i.e. que $\ell = \dfrac{p}{q}$ pour certains $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que la suite $(px_n - qy_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis qu'elle est stationnaire.

b) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, puis qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ pour lequel $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ pour tout $n \geqslant N$.

6) Montrer que pour tous $p, q \geqslant 2$ entiers, la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p^{q^k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{q^k}}$ est un irrationnel.